Program Dinamis
(*Dynamic Programming*)
Bagian 2

Bahan Kuliah IF2211 Strategi Algoritma

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Persoalan 3: Penganggaran Modal (*Capital Budgeting*)

- Sebuah perusahaan berencana akan mengembangkan usaha (proyek) melalui ketiga buah pabrik (*plant*) yang dimilikinya.
- Setiap pabrik diminta mengirimkan proposal (boleh lebih dari satu) ke perusahaan untuk proyek yang akan dikembangkan.

- Setiap proposal memuat total biaya yang dibutuhkan (*c*) dan total keuntungan (*revenue*) yang akan diperoleh (*R*) dari pengembangan usaha itu. Perusahaan menganggarkan Rp 5 milyar untuk alokasi dana bagi ketiga pabriknya itu.

- Tabel berikut meringkaskan nilai *c* dan *R* untuk masing-masing proposal proyek.

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

- Proposal proyek bernilai-nol sengaja dicantumkan yang berarti tidak ada alokasi dana yang diberikan untuk setiap pabrik.
- Tujuan Perusahaan adalah memperoleh keuntungan yang maksimum dari pengalokasian dana sebesar Rp 5 milyar tersebut.
- Selesaikan persoalan ini dengan program dinamis.

Penyelesaian dengan Program Dinamis

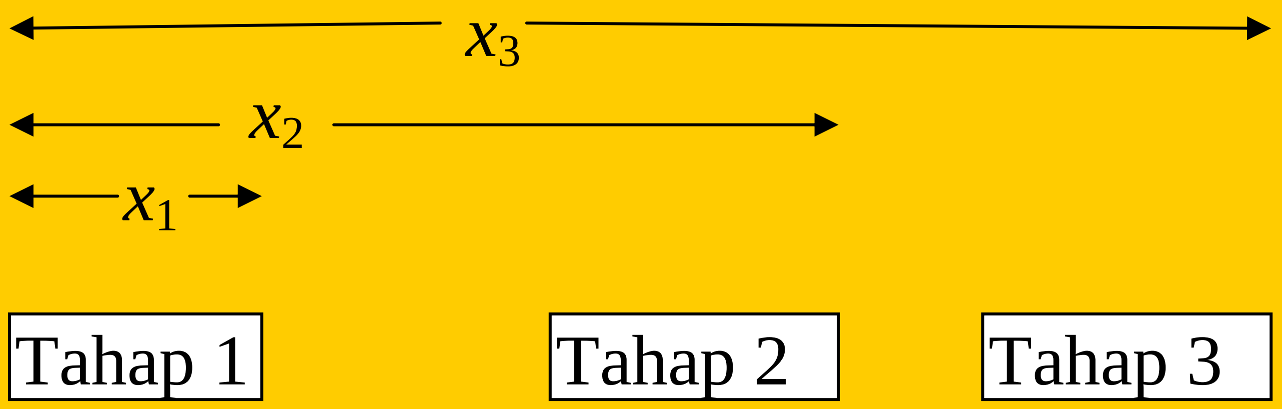
- Tahap (*k*) adalah proses mengalokasikan dana untuk setiap pabrik (ada 3 tahap, tiap pabrik mendefinisikan sebuah tahap).

- Status (x_k) menyatakan jumlah modal yang dialokasikan pada pada setiap tahap (namun terikat bersama semua tahap lainnya).

- Alternatif (*p*) menyatakan proposal proyek yang diusulkan setiap pabrik. Pabrik 1, 2, dan 3 masing-masing memiliki 3, 4 dan 2 alternatif proposal.

Peubah status yang terdapat pada tahap 1, 2, dan 3:

$x_1 = \sum$ modal yang dialokasikan pada tahap 1
$x_2 = \sum$ modal yang dialokasikan pada tahap 1 dan 2
$x_3 = \sum$ modal yang dialokasikan pada tahap 1, 2, dan 3



Kemungkinan nilai-nilai untuk x_1 dan x_2 adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5 (milyar), sedangkan nilai untuk x_3 adalah 5

Penyelesaian dengan Program Dinamis Maju.

Misalkan,

$R_k(p_k)$ = keuntungan dari alternatif p_k pada tahap k

$f_k(x_k)$ = keuntungan optimal dari tahap 1, 2, …, dan k yang diberikan oleh status x_k

Relasi rekurens keuntungan optimal:

$$f_1(x_1) = \max_{\substack{\text{feasible} \\ \text{proposal\_}p_1}} \{R_1(p_1)\} \qquad \text{(basis)}$$

$$f_k(x_k) = \max_{\substack{\text{feasible} \\ \text{proposal\_}p_k}} \{R_k(p_k) + f_{k-1}(x_{k-1})\} \qquad \text{(rekurens)}$$

$$k = 2, 3$$

Catatan:

1. $x_{k-1} = x_k - c_k(p_k)$

   $c(p_k)$ adalah biaya untuk alternatif p_k pada tahap k.

2. Proposal p_k dikatakan layak (*feasible*) jika biayanya, $c(p_k)$, tidak melebihi nilai status x_k pada tahap k.

Relasi rekurens keuntungan optimal menjadi

$$f_1(x_1) = \max_{c_1(p_1) \le x_1} \{R_1(p_1)\} \qquad \text{(basis)}$$

$$f_k(x_k) = \max_{c_k(p_k) \le x_k} \{R_k(p_k) + f_{k-1}[x_k - c_k(p_k)]\} \qquad \text{(rekurens)}$$

$$k = 2, 3$$

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

Tahap 1

$$f_1(x_1) = \max_{\substack{c_1(p_1)\le x_1 \\ p_1=1,2,3}} \{R_1(p_1)\}$$

x_1	$R_1(p_1)$			Solusi Optimal	
	$p_1 = 1$	$p_1 = 2$	$p_1 = 3$	$f_1(x_1)$	p_1^*
0	**0**	-	-	0	1
1	0	**5**	-	5	2
2	0	5	**6**	6	3
3	0	5	**6**	6	3
4	0	5	**6**	6	3
5	0	5	**6**	6	3

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

Tahap 2

$$f_2(x_2) = \max_{\substack{c_2(p_2)\le x_2 \\ p_2=1,2,3,4}} \{R_2(p_2) + f_1[(x_2 - c_2(p_2)]\},$$

x_2	$R_2(p_2) + f_1[(x_2 - c_2(p_2)]$				Solusi Optimal	
	$p_2 = 1$	$p_2 = 2$	$p_2 = 3$	$p_2 = 4$	$f_2(x_2)$	p_2^*
0	0 + 0 = **0**	-	-	-	0	1
1	0 + 5 = **5**	-	-	-	5	1
2	0 + 6 = 6	8 + 0 = **8**	-	-	8	2
3	0 + 6 = 6	8 + 5 = **13**	9 + 0 = 9	-	13	2
4	0 + 6 = 6	8 + 6 = **14**	9 + 5 = **14**	12 + 0 = 12	14	2 atau 3
5	0 + 6 = 6	8 + 6 = 14	9 + 6 = 15	12 + 5 = **17**	17	4

Proyek	Pabrik 1		Pabrik 2		Pabrik 3	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	-	-
4	-	-	4	12	-	-

Tahap 3

$$f_3(x_3) = \max_{\substack{c_3(p_3) \le x_3 \\ p_3 = 1,2}} \{R_3(p_3) + f_2[(x_3 - c_3(p_3))]\},$$

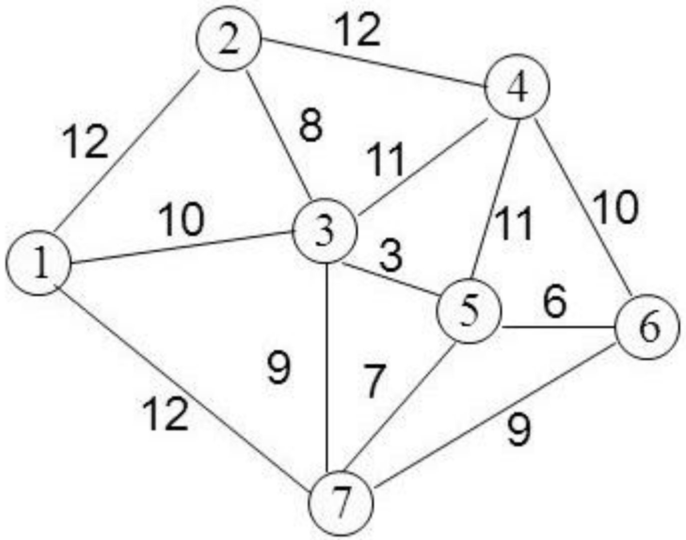
x_3	$R_3(p_3) + f_2[(x_3 - c_3(p_3))]$		Solusi Optimal	
	$p_3 = 1$	$p_3 = 2$	$f_3(x_3)$	p_3^*
5	0 + 17 = **17**	3 + 14 = **17**	17	1 atau 2

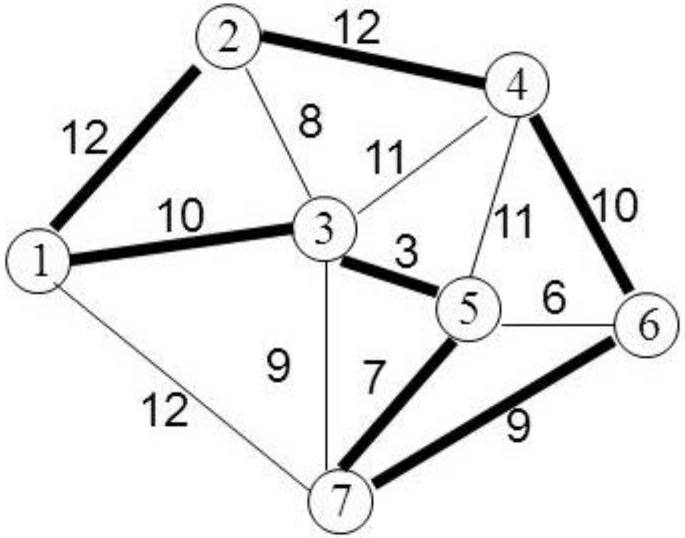
Rekonstruksi solusi:

x_3	p_3^*	x_2	p_2^*	x_1	p_1^*	(p_1^*, p_2^*, p_3^*)
	1	(5 – 0 = 5)	4	(5 – 4 = 1)	2	(2, 4, 1)
1						
			2	(4 – 2 = 2)	3	(3, 2, 2)
	2	(5 – 1 = 4)				
			3	(4 – 3 = 1)	3	(2, 3, 2)

Persoalan 4: *Travelling Salesperson Problem* (TSP)

- Diberikan sejumlah kota dan diketahui jarak antar kota. Tentukan tur terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota dan menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.





- Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf lengkap berarah dengan sisi-sisi yang diberi harga $c_{ij} > 0$.

- Misalkan $|V| = n$ dan $n > 1$. Setiap simpul diberi nomor 1, 2, …, n.

- Asumsikan perjalanan (tur) dimulai dan berakhir pada simpul 1.

- Setiap tur pasti terdiri dari sisi (1, k) untuk beberapa $k \in V - \{1\}$ dan sebuah lintasan dari simpul k ke simpul 1.

- Lintasan dari simpul k ke simpul 1 tersebut melalui setiap simpul di dalam $V - \{1, k\}$ tepat hanya sekali.

- Prinsip Optimalitas: jika tur tersebut optimal maka lintasan dari simpul k ke simpul 1 juga menjadi lintasan k ke 1 **terpendek** yang melalui simpul-simpul di dalam $V - \{1, k\}$.

- Misalkan *f*(*i*, *S*) adalah bobot lintasan terpendek yang berawal dari simpul *i*, yang melalui semua simpul di dalam *S* dan berakhir pada simpul 1.

- Nilai *f*(1, *V* – {1}) adalah bobot tur terpendek.

Hubungan rekursif:

$$f(1, V - \{1\}) = \min_{2 \le k \le n}\{c_{1k} + f(k, V - \{1, k\})\} \qquad (1)$$

Dengan merampatkan persamaan (1), diperoleh

$$f(i, \varnothing) = c_{i,1} \quad , \; 2 \le i \le n \qquad \text{(basis)}$$
$$f(i, S) = \min_{j \in S}\{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\} \quad \text{(rekurens)} \quad (2)$$

Gunakan persamaan (2) untuk memperoleh *f*(*i*, *S*) untuk $|S| = 1$, *f*(*i*, *S*) untuk $|S| = 2$, dan seterusnya sampai untuk $|S| = n - 1$.

Tinjau persoalan TSP untuk $n = 4$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Tahap 1: $f(i, \varnothing) = c_{i,1} \quad , \; 2 \le i \le n$

Diperoleh:

$f(2, \varnothing) = c_{21} = 5;$
$f(3, \varnothing) = c_{31} = 6;$
$f(4, \varnothing) = c_{41} = 8;$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Tahap 2:

$$f(i, S) = \min_{j \in S}\{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\} \quad \text{untuk } |S| = 1$$

Diperoleh:

$f(2, \{3\}) = \min\{c_{23} + f(3, \varnothing)\} = \min\{9 + 6\} = \min\{15\} = 15$

$f(2, \{4\}) = \min\{c_{24} + f(4, \varnothing)\} = \min\{10 + 8\} = \min\{18\} = 18$

$f(3, \{2\}) = \min\{c_{32} + f(2, \varnothing)\} = \min\{13 + 5\} = \min\{18\} = 18$

$f(3, \{4\}) = \min\{c_{34} + f(4, \varnothing)\} = \min\{12 + 8\} = \min\{20\} = 20$

$f(4, \{2\}) = \min\{c_{42} + f(2, \varnothing)\} = \min\{8 + 5\} = \min\{13\} = 13$

$f(4, \{3\}) = \min\{c_{43} + f(3, \varnothing)\} = \min\{9 + 6\} = \min\{15\} = 15$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Tahap 3:

$$f(i, S) = \min_{j \in S}\{c_{ij} + f(j, S - \{j\})\}$$

untuk $|S| = 2$ dan $i \neq 1$, $1 \notin S$ dan $i \notin S$.

Diperoleh:

$$\begin{aligned} f(2, \{3, 4\}) &= \min\{c_{23} + f(3, \{4\}), c_{24} + f(4, \{3\})\} \\ &= \min\{9 + 20, 10 + 15\} \\ &= \min\{29, 25\} \quad = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3, \{2, 4\}) &= \min\{c_{32} + f(2, \{4\}), c_{34} + f(4, \{2\})\} \\ &= \min\{13 + 18, 12 + 13\} \\ &= \min\{31, 25\} \quad = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4, \{2, 3\}) &= \min\{c_{42} + f(2, \{3\}), c_{43} + f(3, \{2\})\} \\ &= \min\{8 + 15, 9 + 18\} \\ &= \min\{23, 27\} = 23 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (1) diperoleh:

$$\begin{aligned} f(1, \{2, 3, 4\}) &= \min\{c_{12} + f(2, \{3, 4\}),\ c_{13} + f(3, \{2, 4\}), \\ &\qquad c_{14} + f(4, \{2, 3\})\} \\ &= \min\{10 + 25,\ 15 + 25,\ 20 + 23\} \\ &= \min\{35, 40, 43\} = 35 \end{aligned}$$

Jadi, bobot tur yang berawal dan berakhir di simpul 1 adalah 35.

Menentukan lintasan yang dilalui

- Tinjau pada setiap $f(i, S)$ nilai j yang meminimumkan persamaan (2)

- Misalkan $J(i, S)$ adalah nilai yang dimaksudkan tersebut. Maka, $J(1, \{2, 3, 4\}) = 2$. Jadi, tur mulai dari simpul 1 selanjutnya ke simpul 2.

- Simpul berikutnya dapat diperoleh dari $f(2, \{3, 4\})$, yang mana $J(2, \{3, 4\}) = 4$. Jadi, simpul berikutnya adalah simpul 4.

- Simpul terakhir dapat diperoleh dari $f(4, \{3\})$, yang mana $J(4, \{3\}) = 3$.

- Jadi, tur yang optimal adalah 1, 2, 4, 3, 1 dengan bobot = 35.

SELAMAT BELAJAR